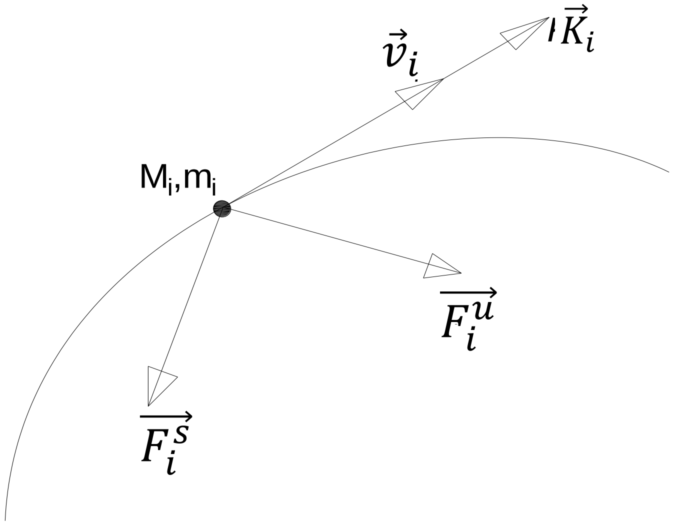
1. Teorema o priraštaju količine kretanja

Uočimo tačku M_i, mase m_i, čija je brzina $\vec{v}_i$. Količina kretanja ove tačke je:

$$\vec{K} = m_i \vec{v}_i$$

Količina kretanja sistema materijalnih tačaka definišemo kao vektorski zbir količina kretanja svih tačaka u tom sistemu:



$$\vec{K} = \sum_i \vec{K}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i)$$

$$\vec{K} = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i)$$

$$\sum m_i \vec{r}_i = M\vec{r_c}$$

$$\vec{K} = \frac{d}{dt}(M\,\vec{r_c}) = M\,\vec{v}_c \qquad (1)$$

Za sistem materijalnih tačaka količina kretanja jednaka je količini kretanja središta sistema. To je količina kretanja tačke, u kojoj je skoncentrisana ukupna masa sistema, a brzina je jednaka brzini centra sistema.

(1) diferenciramo po vremenu:

(2) $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = M\dfrac{d\vec{v}_c}{dt} = M\ddot{\vec{r}}_c = \overrightarrow{F_r}^s$ => teorema količine kretanja za sistem u diferencijalnom obliku.

To znači da je količina kretanja ukupnog sistema ekvivalentna količini kretanja njegovog središta. Izvod količine kretanja po vremenu jednak je glavnom vektoru svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem. Unutrašnje sile ne utiču na promjenu količine kretanja sistema.

Iz ove teoreme imamo dvije posledice, kojima se potvrđuje da važi zakon o održanju količine kretanja.

I posledica: Ako je glavni vektor spoljašnjih sila za cijelo vrijeme kretanja jednak nuli, onda je vektor količine kretanja konstantan.

$$\overrightarrow{F_r}^s = 0, \ \frac{dK}{dt} = 0 \Rightarrow \ \vec{K} = M\vec{v}_c \ const \Rightarrow \ \vec{v}_c = \ const$$

Prema tome, brzina središta masa je konstantna ili jednaka nuli, ako je u početnom trenutku $(\vec{v}_c)_0 = 0$. Pošto je $\vec{K}$=const, važi zakon o održanju količine kretanja.

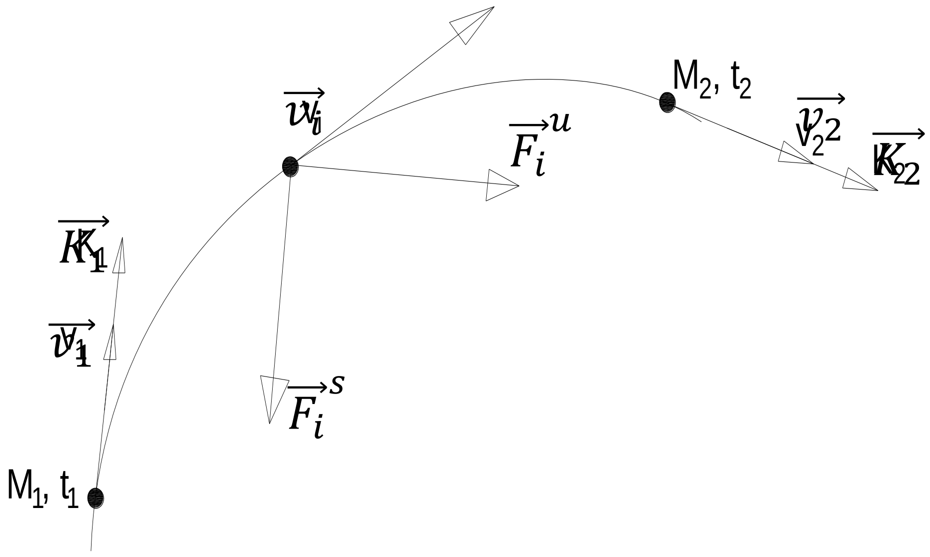
II posledica: Ako glavni vektor spoljašnjih sila nije jednak nuli, $\overrightarrow{F_r}^s \neq 0$, ali je njegova projekcija na neku od osa jednaka nuli:

$$X_r^s = 0, \ \frac{dK_x}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ K_x = const\,, \ \frac{d(M\dot{x}_c)}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ M\dot{x}_c = 0 \Rightarrow \ \dot{x}_c = const.$$

Dakle, u ovom slučaju količina kretanja na pravac x ose je konstantna, $K_x = const$, pa važi zakon o održanju količine kretanja za pravac x.

Integralni oblik zakona o promjeni količine kretanja

Prikazivanje teoreme u integralnom obliku, daće nam promjenu količine kretanja za konačan vremenski interval.



Polazimo od jednačine $d\vec{K} = \vec{F_r}^s dt,$ tj.

$$d\vec{K} = d\vec{I} = \vec{F_r}^s dt \;/\int .$$

Unutrašnje sile ne utiču na količinu kretanja.

$$\int_{v_1}^{v_2} d\vec{K} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F_r}^s dt$$

$$\vec{K_2} - \vec{K_1} = \vec{I^s}_r$$

Promjena količine kretanja za neki konačni vremenski interval jednaka je glavnom vektoru impulsa spoljašnjih sila za isti vremenski interval.

Ovoj vektorskoj jednačini odgovaraju tri sklarne jednačine u Dekartovom sistemu:

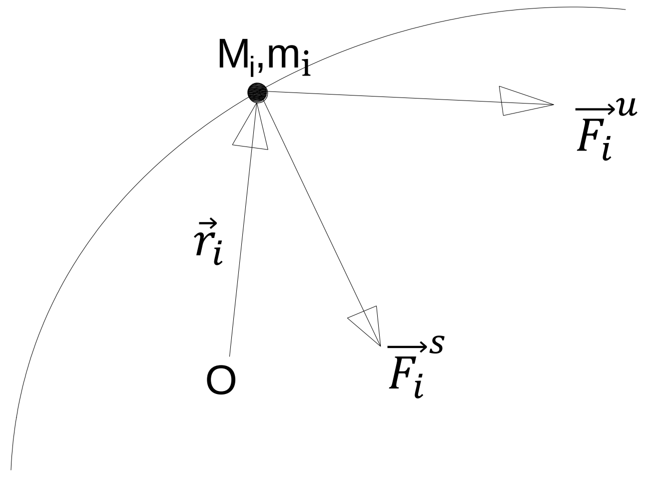
$$K_{2x} - K_{1x} = I_x{}^s$$

$$K_{2y} - K_{1y} = I_y{}^s$$

$$K_{2z} - K_{1z} = I_z{}^s$$

Priraštaj projekcije količine kretanja sistema za neku nepokretnu osu za konačan vremenski interval jednak je zbiru projekcija impulsa svih spoljašnjih sila za tu osu.

Moment količine kretanja sistema

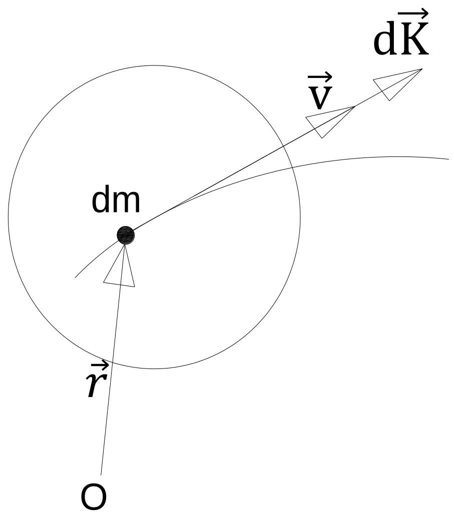


Uočimo bilo koju tačku M sistema od n mogućih. Pošto je sistem onda imamo unutrašnju i spoljašnju silu koja dejstvuje na neku tačku.

$$\vec{L}_0(\vec{K}) = \vec{L}_{i0} = \vec{r}_i \; x \, \vec{K}_i = \vec{r}_i \, x \, m_i \vec{v}_i$$

$$\sum_i \vec{L}_{i0} = \sum_i (\vec{r}_i \, x \, m \, \vec{v}_i)$$

Ako je neprekidan raspored masa, uočimo za dato tijelo element mase dm, pa je:



$$d\vec{L}_0 = \vec{r} \; x \; d\vec{K}$$

$$\vec{L}_0 = \int_M \left(\vec{r} \; x \; d\vec{K}\right) = \int_M \left(\vec{r} \; x \; \vec{v}\right) dm$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i \; x \; m_i \vec{v}_i) + \sum_i (\vec{r}_i \; x \; m \; \vec{a}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \; x \; m \; \vec{a}_i)$$

$$\sum_i (\vec{v}_i \; x \; m_i \vec{v}_i) = 0$$

kao vektorski proizvod dva kolinearna vektora

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i \vec{r}_i\, x (\overrightarrow{F_i}^s + \overrightarrow{F_i}^u) = \sum_i (\vec{r}_i\, x\, \overrightarrow{F_i}^s) + \sum_i (\vec{r}_i\, x\, \overrightarrow{F_i}^u)$$

$$\sum_i (\vec{r}_i\, x\, \overrightarrow{F_i}^u) = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i\, x\, \overrightarrow{F_i}^s) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_o^s \qquad (1)$$

Izvod momenta količine kretanja sistema u odnosu na neku tačku O po vremenu jednak je glavnom momentu svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem u odnosu na istu tačku.

$$\frac{dL_x}{dt} = \mathfrak{M}_x^s$$
$$\frac{dL_y}{dt} = \mathfrak{M}_y^s \qquad (1')$$
$$\frac{dL_z}{dt} = \mathfrak{M}_z^s$$

posledice:

1) ako je $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_o^s = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = const$

Ako je glavni moment spoljašnjih sila nula, onda je moment količine kretanja konstantan, tj. važi zakon o održanju momenta količine kretanja.

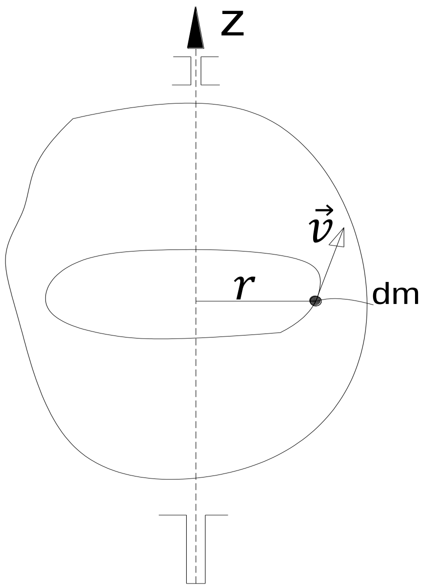
2) $\mathfrak{M}_0^s \neq 0$, a $\mathfrak{M}_x^s = 0 \Rightarrow \frac{dL_x}{dt} = 0 \Rightarrow L_x = const$

Ako je glavni moment spoljašnjih sila različit od nule, a njegova projekcija na pravac x jednaka nuli, onda je moment količine kretanja za taj pravac konstantan tj. važi zakon o održanju momenta količine kretanja za taj pravac.

Na moment količine kretanja utiču samo spoljašnje sile.

Moment količine kretanja tijela koje se obrće oko nepokretne ose

Svaka masa ima svoju brzinu i kreće se oko nepokretne ose na nekom rastojanju.



$$dL_z = dK\, r_z = v\, dm\, r_z$$

$$v = \omega_z r_z$$

$$dL_z = \omega_z {r_z}^2 dm$$

$$L_z = \int_{(m)} dL_z = \int_M \omega_z r^2 dm = \omega_z \int_M r^2 dm$$

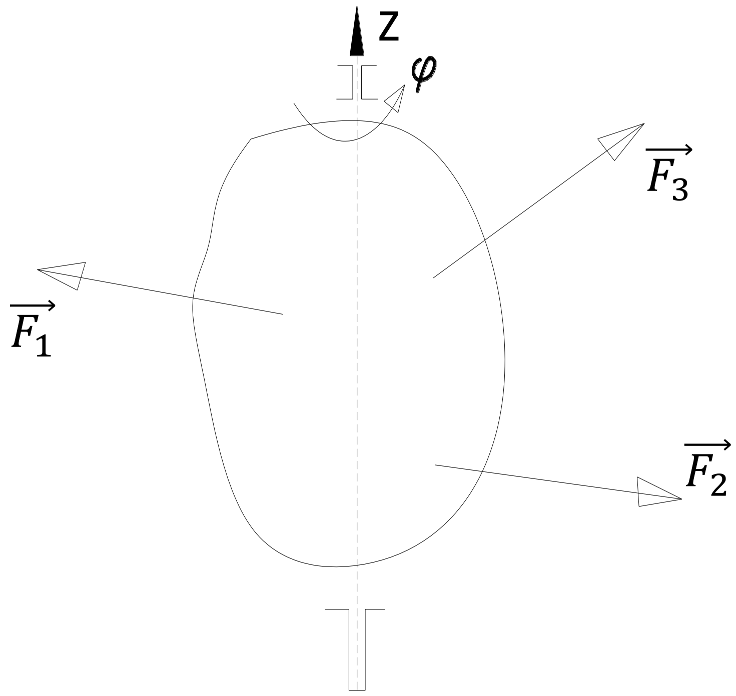
$$L_z = I_z \omega_z$$

ω – ugaona brzina je kinematička karakteristika tijela u cjelini koje se obrće oko nepokretne ose, pa je ista za sve tačke tijela. Ubrzanje takođe.

Moment količine kretanja određen je proizvodom momenta inercije za tu osu i ugaone brzine.

Diferencijalna jednačina obrtanja krutog tijela oko ose

Imamo sistem sila koje dejstvuju na neko tijelo koje može da rotira oko ose z.



Diferencijalna jednačina obrtanja krutog tijela određena je zakonom momenta količine kretanja za tu osu.

$$\frac{dL_z}{dt} = \mathfrak{M}_z^s$$

Ako uzmemo da je $L_z = I_z\,\omega$

tada imamo $I_z \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}_z^s = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2},$

odnosno,

$$I_z\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_z^s \sim m\ddot{x} = F$$

Proizvod momenta inercije za tu osu i ugaonog ubrzanja jednak je sumi momenata svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na tijelo.